Zadanie. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^3.$$

Rozwiązanie. Aby zbadać zbieżność podanego szeregu zastosujemy kryterium Raabego. Wyznaczmy w tym celu iloraz

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}\right]^3 = \\ &= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3.\end{aligned}$$

Następnie obliczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3-1\right].$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia oraz obliczając elementarne granice ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left[1+\frac{3}{2n+1}+\frac{3}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^3}-1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{3}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3}\right] = \frac{3}{2} > 1.\end{aligned}$$

Na podstawie ww. kryterium badany szereg jest zbieżny.

Uwaga. Zastosowanie kryterium d'Alemberta dla badanego szeregu nie rozstrzyga jego zbieżności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3} = 1.$$

Kryterium Raabego.
Jeżeli wyrazu szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie i jeżeli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, to:

- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = 1$, nie możemy nic powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, należy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.