Zadanie. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Rozwiązanie. Dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ wyrazy szeregu są dodatnie oraz zachodzi nierówność

$$\ln n < n.$$

Z nierówności tej wnioskujemy, że każdy wyraz $a_n = \frac{1}{\ln n}$ badanego szeregu jest większy od wyrazu $b_n = \frac{1}{n}$ szeregu harmonicznego, tzn.

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Ponieważ szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to na podstawie kryterium porównawczego, rozbieżny jest również dany szereg.

Kryterium porównawcze.
Jeżeli wyrazy szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są nieujemne oraz istnieje takie N, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$ to:

- gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.