Zadanie. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie. Badany szereg jest przemienny tzn. jego wyrazy są naprzemian dodatnie i ujemne

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{n}, ...$$

Aby zbadać zbieżność szeregu skorzystamy z kryterium Leibniza. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu, a ponadto bezwzględne wartości wyrazów szeregu monotonicznie dążą do zera

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > ... > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > ...$$

A zatem, na podstawie ww. kryterium, szereg jest zbieżny.

UWAGA. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ nazywamy szeregiem anharmonicznym.

Kryterium Leibniza.

Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ istnieje takie N, że dla $n > N$ spełnione są warunki

- $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.