Zadanie. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Rozwiązanie. Aby zbadać zbieżność podanego szeregu zastosujemy kryterium d'Alemberta, mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2 \cdot 2^n (n+1) n!}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{2^n n!}.$$

Po skróceniu wyrażeń 2^n, $n+1$, $n!$ otrzymamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

A więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Co dowodzi, na podstawie ww. kryterium, zbieżności badanego szeregu.

Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli wyrazu szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie i jeżeli istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to:

- gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nie możemy nic powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, należy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.