Zadanie. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^{\log n}}$$

dla $x > 1$.

Rozwiązanie. Aby zbadać zbieżność podanego szeregu zastosujemy kryterium Cauchy'ego dla

$$a_n = \frac{x^n}{7^{\log n}},$$

gdzie $x > 1$. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{7^{\log n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(7^{\log n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{7^{\frac{\log n}{n}}} = \frac{x}{2^0} = x.$$

Na podstawie ww. kryterium oraz z uwagi na założenie $x > 1$ badany szereg jest rozbieżny.

Kryterium Cauchy'ego.
Jeżeli wyrazu szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są nieujemne i jeżeli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, to:

- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nie możemy nic powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, należy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.