Zadanie. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}.$$

Rozwiązanie. Dla argumentu π licznik i mianownik wynosi 0, a więc jest to przypadek ilorazu wielkości nieskończenie małych $\frac{0}{0}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ oraz ze wzoru skróconego mnożenia $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ rozkładamy licznik i mianownik na czynniki, mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} &= \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}.\end{aligned}$$

Po skróceniu wyrażenia $1+\cos x$ ostatecznie otrzymamy

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{1-\cos\pi}{1-\cos\pi+\cos^2\pi}=\frac{2}{3}.$$