Zadanie. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 8^n + 13^n}.$$

Rozwiązanie. Zauważymy, że prawdziwe są następujące nierówności

$$13^n < 5^n + 8^n + 13^n < 13^n + 13^n + 13^n$$

z których wynika, że

$$\sqrt[n]{13^n} < \sqrt[n]{5^n + 8^n + 13^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 13^n},$$

a więc

$$13 < \sqrt[n]{5^n + 8^n + 13^n} < 13\sqrt[n]{3}.$$

Wyrazy badanego ciągu zawarte są pomiędzy odpowiednimi wyrazami ciągów, których granice wynoszą

$$\lim_{n\to\infty} 13 = 13, \qquad \lim_{n\to\infty} 13\sqrt[n]{3} = 13 \cdot 1 = 13.$$

Stąd, na podstawie twierdzenia o trzech ciągach, szukana granica jest równa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 8^n + 13^n} = 13.$$

Uwaga. Obliczając granicę $\lim_{n\to\infty} 13\sqrt[n]{3}$, skorzystaliśmy ze wzoru

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla} \quad a > 0.$$

Twierdzenie o trzech ciągach.
Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do wspólnej granicy g, tzn.

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} b_n = g$$

oraz istnieje takie N, że

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

dla $n > N$, to ciąg (c_n) ma tę samą granicę, czyli

$$\lim_{x\to\infty} c_n = g.$$