Zadanie. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Przy n dążącym do nieskończoności wyrażenie w nawiasie przyjmuje wartość jeden, rzeczywiście

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1,$$

mamy zatem do czynienia z przypadkiem 1^{∞}. Wykonajmy następujące przekształcenia obliczanej granicy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n+1}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^n=\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{n+1}\cdot n}.\end{aligned}$$

Granica wyrażenia w nawiasie kwadratowym jest równa liczbie e, a więc po obliczeniu granicy w wykładniku, ostatecznie mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{n}}}=e^{-2}$$

Uwaga 1. Przy obliczaniu granicy skorzystaliśmy z twierdzenia:
Jeżeli w ciągu (a_n) wszystkie wyrazy są różne od zera i jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

W naszym przypadku $a_n=\frac{n+1}{-2}$.

Uwaga 2. Podaną granicę możemy obliczyć w inny sposób

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

Podobnie jak w rozwiązaniu zadania skorzystaliśmy z twierdzenia powyżej, przy czym w tym przypadku $a_n=-n$ dla wyrażenia w liczniku oraz $a_n=n$ dla wyrażenia w mianowniku.