Zadanie. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Rozwiązanie. Dla $x=1$ wyrażenie $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ jest nieoznaczone, tj. $\infty-\infty$. Odejmując ułamki otrzymujemy wyrażenie
$$\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$
które w punkcie $x=1$ jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Stosując regułę de l'Hospitala mamy
$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x+1}{(x-1)\ln x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-1}{1\cdot \ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x\ln x + x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1}.$$

Okazuje się, że granica otrzymanego wyrażenia w punkcie $x=1$ jest nadal postaci $\frac{0}{0}$. Stosujemy zatem ponownie regułę de l'Hospitala
$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2} = \frac{1}{2}$$

Ostatecznie szukana granica wynosi
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Uwaga. Obliczając pochodne funkcji w liczniku i mianowniku skorzystaliśmy ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Reguła de l'Hospitala dla przypadku $\frac{0}{0}$.
Jeżeli dla funkcji $f(x)$ i $g(x)$, mających pierwszą pochodną w otoczeniu punktu $x=a$, zachodzi związek $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ i jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$