

Zadanie. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

Rozwiązanie. Wprowadzamy nową zmienną całkowania, podstawiając $\frac{1}{x} = t$. Różniczkując obustronnie otrzymamy $\frac{1}{x^2} dx = -dt$, a ponadto ustalamy nowe granice całkowania

$$\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

W konsekwencji, wykorzystując wzór przestawienia granic całki

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

szukana całka ma postać

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = - \int_1^{\frac{1}{2}} e^t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt.$$

Korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza ostatecznie mamy

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = e - \sqrt{e}.$$