

Zadanie. Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną właściwą tzn. stopień mianownika jest wyższy od stopnia licznika, a więc możemy rozłożyć ją na sumę ułamków prostych. W tym celu rozkładamy mianownik na czynniki

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2,$$

a następnie funkcję podcałkową przedstawiamy w postaci sumy ułamków prostych

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}, \quad (*)$$

gdzie A, B i C są współczynnikami, które wyznaczymy. Sprowadzając lewą stronę równości do wspólnego mianownika i mnożąc przez ten mianownik mamy

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 1 &= A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = \\ &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx = \\ &= (A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x po obu stronach otrzymanej tożsamości dostajemy układ równań

$$\begin{cases} A+B=2 \\ C-2A-B=-5 \\ A=1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest trójka $A=1$, $B=1$ i $C=-2$. Podstawiając znalezione wartości współczynników do równania (*) mamy

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Otrzymaną sumę ułamków prostych podstawiamy pod znak całki i każdy ze składników całkujemy osobno wykorzystując podstawowe wzory rachunku całkowego. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \\ &= \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c. \end{aligned}$$