Zadanie. Obliczyć całkę

$$\int \cos(\ln x)\,dx.$$

Rozwiązanie. Zastosujemy wzór całkowania przez części, oznaczmy

$$u = \cos(\ln x), \qquad dv = dx.$$

Obliczając pochodną funkcji złożonej mamy

$$du = \frac{d}{dx}[\cos(\ln x)] = -\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$$

oraz $v = x$. A zatem

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx. \tag{$*$}$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie równania ponownie całkujemy przez części, oznaczając

$$u = \sin(\ln x), \qquad dv = dx.$$

Skąd mamy

$$du = \frac{d}{dx}[\sin(\ln x)] = \cos(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$$

oraz $v = x$. A więc

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Wracając do równania $(*)$ oraz po przekształceniach otrzymujemy

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx,$$

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)].$$

Ostatecznie

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + c.$$