

Zadanie. Obliczyć całkę

$$\int \frac{15x^4 - 7x^3 + \pi}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rozwiązanie. Korzystając ze podstawowych wzorów rachunku całkowego przekształcamy obliczaną całkę na trzy całki

$$\int \frac{15x^4 - 7x^3 + \pi}{2\sqrt{x}} dx = \frac{15}{2} \int \frac{x^4}{\sqrt{x}} dx - \frac{7}{2} \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx + \frac{\pi}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Następnie, wykorzystując własności potęg, obliczymy całki bezpośrednio ze wzoru

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad \text{dla } n \neq -1.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^4 - 7x^3 + \pi}{2\sqrt{x}} dx &= \frac{15}{2} \int x^{\frac{7}{2}} dx - \frac{7}{2} \int x^{\frac{5}{2}} dx + \frac{\pi}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{\pi}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + c. \end{aligned}$$

Po dalszych przekształceniach ostatecznie otrzymamy

$$\int \frac{15x^4 - 7x^3 + \pi}{2\sqrt{x}} dx = \frac{5}{3} x^4 \sqrt{x} - x^3 \sqrt{x} + \pi \sqrt{x} + c.$$